論　文

計算過程の重要性
ー文字式と指数・分数の問題についてー

藤　垣　佳　子
岐阜聖徳学園大学教育学部

The Importance of the Calculation Process
—In the case of Literal Expressions, Exponents and Fractions—

Yoshiko FUJIGAKI

Abstract

When students learn mathematics, it's important for them to understand mathematical concepts, and it's also important for them to learn how to calculate correctly. To do so, much calculation practice is required. Learning the way of accurate calculation with an easy-to-follow calculation process is needed.

In this paper, we studied why the calculation process is important for making an accurate calculation utilizing questionnaires for some calculations. The results also showed us the importance of writing the numbers and symbols of operations exactly.

This time we focused on the calculation problems of literal expressions, exponents, and fractions, and then sought a connection between the calculation process and the correct answer.

Keywords : calculation process, literal expressions, exponents, fractions

Ⅰ．はじめに

数学を学ぶ際に学生が難しさを感じる理由として、数学的概念そのものの複雑さを挙げることが多いが、それ以外に正確に計算を行う難しさも要因の一つと考えられる。特に計算の学習においては、段階を踏んで積み重ねられた計算能力が必要となるため、一旦つまずいてしまうと、それより先の計算方法を身に付けることが困難になる場合が多い。数学の（特に計算に関する）学習において、十分な演習と必要に応じて復習を行う反復学習が大切であることは言うまでもなく、またどの段階でつまずいているのかを教える側と学ぶ側の双方が理解するためにも、計算過程を明確に書き記す学習方法の徹底が必要ではないだろうか。

私が大学で指導を行う際に、複雑な計算をこなしているにも関わらず、意外にも些細な個所で計算間違いをする、という学生の解答を目にすることが度々ある。計算過程が明確に記されたものもあれば、かなり省略されたものもあり一概には述べられないが、計算過程を正確に分かりやすく記すことで計算間違いを減らせるのではないか、と感じたことが本研究の始まりである。時には、自身の記した数字や演算記号を見間違えて計算間違いを生じる学生も少なからず居ることから、正確な数字や演算記号の記述が出来る指導を行うことも重要であると感じている。数式に限らず書き記し方というものは、一旦身に付けてしまうとなかなかその癖を直せないようであるから、学習初期の段階で正しい書き方を徹底することも必要であろう。

本研究では、大学生に高校数学までの知識で解くことが出来る基礎的な計算問題を解いてもらうことで、その計算過程と計算結果の正誤性の関係を調べる事にした。とりわけ、「分かっているのに」や、「うっかり間違えた」と言われやすい問題を取り上げることで、計算過程の重要性を説明出来るよう努めたつもりである。また、あまりに幅広い数学分野から出題しても、学生に真剣に取り組んでもらえず、本来の正しい結果の傾向が分かり難いと考えた。そこで今回は、種々の計算問題の中から特に文字式と指数・分数に関する問題に絞って実態を調べることにした。

Ⅱ. 調査方法とその内容

計算問題に関するアンケートを行う際に、現在も継続して数学を勉強し計算演習を行っている集団として、教育学部に在籍しており小学校・中学校の数学教師を目指す学生たちを対象とした。岐阜聖徳学園大学教育学部の学生 118 名に協力を頼み、2013 年 6 月に調査を行った。調査の際に、出来る限り計算過程を省略せずに書いて欲しい旨を伝えて、下記の様な計算問題を解いてもらった。

計算問題に関するアンケート　　　　　　　　　　　学籍番号(下 3 桁を除く)K＿ ＿ ＿ ＿

以下の計算問題を解いて下さい。(計算過程は省略しない)

1. $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-x}$

2. $\dfrac{x^2+2x}{x+3}\div\dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$

3. $0.00036=3.6\times10^a$ をみたす a の値を求めよ。

4. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{4}\div\sqrt[12]{4}$

5. $(8a^2b)^2\div(-4ab^2)^3\times(-2a^{-1}b^2)^4$

6. $\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{20}$　をみたす a の値を求めよ。

7. m、M、g を正の定数とするとき、a, T を求めよ。

$$\begin{cases} Ma = Mg - T \\ ma = T - mg \end{cases}$$

Ⅲ. 集計結果とその分析

計算問題に関するアンケートを集計し、その結果と解答及び誤答例についてまとめたものは以下の通りである。(計算が途中で終わり、答えが出ていない解答については未解答とした。また今回は正しく計算が出来るかに焦点を当てたため、例えば約分が出来ていない等、通常は減点対象となる解答も正答として集計した。)

表１　アンケート集計結果　（回答者数 118 名）

問題番号	正　答	誤　答	未解答	正答率(%)
1	96	22	0	81.36
2	108	10	0	91.53
3	103	14	1	87.29
4	83	31	4	70.34
5	56	60	2	47.46
6	107	9	2	90.68
7	66	31	21	55.93

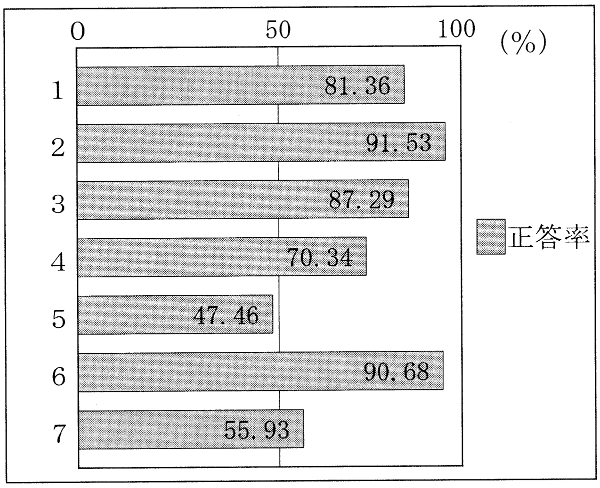

図１　各設問における正答率

解答例及び誤答例

１. 解答例：

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x}$$

$$=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{2x-(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{\cancel{x-1}}{x(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{1}{x(x+1)} \qquad \cdots(答)$$

誤答例：

- 答えが $\frac{1}{x(x-1)}$ や $\frac{1}{x+1}$ など、通分の計算間違いによるもの。
- 分子を計算する際に $-(x+1)=-x+1$ とする展開の計算間違い。
- 今回は正答として扱っているが、約分されていない解答［ $\frac{x-1}{x(x^2-1)}$ ］や、せっかく因数分解したものを最後に展開してしまう解答等が見られた。

２. 解答例：

$$\frac{x^2+2x}{x+3}\div\frac{x^2-4x}{x^2-x-12}$$

$$=\frac{x(x+2)}{x+3}\div\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+3)}$$

$$=\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x+3}}\times\frac{\cancel{(x-4)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{x}\cancel{(x-4)}}$$

$$=\quad x+2 \qquad \cdots(答)$$

誤答例：

- 割り算を掛け算に直してから因数分解する、又は因数分解してから掛け算に直すという段階を踏まずに、同時に変形を行い計算間違いをしたもの。
- 割り算を掛け算に直さず、そのまま計算しようとして計算を間違えたもの。
- x^2-x-12 の因数分解を間違えたもの。
- 約分の斜線が薄く、例えば
$$\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x+3}}\times\frac{\cancel{(x-4)(x+3)}}{\cancel{x}\cancel{(x-4)}}=x^2+2x$$
など、項を拾う段階で間違えたものが数件あった。

３. 解答例：

$$0.00036=\frac{3.6}{10000}=3.6\times10^{-4}$$

より、$a=-4$ 　　…(答)

誤答例：

・答えが４、－３、－５、10000など。誤答の解答には答えのみの記載が多い。

４．解答例：

$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{4}\div\sqrt[12]{4}$$
$$=4^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{4}}\div4^{\frac{1}{12}}$$
$$=4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}$$
$$=4^{\frac{6}{12}}$$
$$=4^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{2\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=2\quad\cdots(答)$$

誤答例：

・答えが、１、$\sqrt[3]{4}$、4^7、$4^{\frac{7}{12}}$ など。

・$\sqrt[3]{4}=(\sqrt{4})^{\frac{1}{3}}$ と変形する、あるいは指数法則を用いた計算の間違い等があった。

・$\sqrt[12]{4}\div\sqrt[12]{4}=1$ という解答が５件あった。

５．解答例：

$$(8a^2b)^2\div(-4ab^2)^3\times(-2a^{-1}b^2)^4$$
$$=\frac{64a^4b^2}{-64a^3b^6}\times16a^{-4}b^8$$
$$=-\frac{16b^4}{a}\cdots(答)$$

誤答例：

・約分間違いや、－(符号)の付け忘れが非常に多い。

・$4^3=16$ や $8^2=8$ の様に自分で書いた数字を見間違えるケースがあった。

６．解答例：

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{a}=\frac{1}{20}\quad より、$$
$$\frac{1}{a}=\frac{1}{20}-\frac{1}{60}$$
$$=\frac{3-1}{60}$$
$$=\frac{2}{60}$$
$$=\frac{1}{30}$$

よって、$a=30$ …(答)

誤答例：

・答えが$\frac{60}{29}$、15、0.5 など、通分の計算間違いによるもの。
特に、$\frac{1}{20}-\frac{1}{60}=\frac{29}{60}$ とする通分の計算間違いが３件あった。

７．解答例：

$$\begin{cases} Ma = Mg - T & \cdots① \\ ma = T - mg & \cdots② \end{cases}$$

①＋②より、

$$(M+m)a=(M-m)g$$
$$a=\frac{M-m}{M+m}g\cdots③$$

③を①に代入

$$T=M(g-a)$$
$$=M\left(g-\frac{M-m}{M+m}g\right)$$
$$=Mg\left(1-\frac{M-m}{M+m}\right)$$
$$=Mg\,\frac{(M+m)-(M-m)}{M+m}$$
$$=Mg\,\frac{2m}{M+m}$$
$$=\frac{2Mm}{M+m}g$$

よって、

$$a=\frac{M-m}{M+m}g、T=\frac{2Mm}{M+m}g\quad\cdots(答)$$

誤答例：

・答えが、$T=0$、$a=g$ という解答が数件あった。

・未解答に該当する答えが一番多い設問であるが、片方の答えを出してももう一方の答えを計算出来ていないものが多い。誤答・未解答共に先にTを求めようとしている解答が多かった。

上記の集計結果には、予想通りのものもあればそうでない結果も含まれている。今回の設問については、高校で数学Ｉ・IIを履修している事を前提として作成したが、中には中学校までの数学の知識で対応できる問題も含まれている。[1)2)] 全体として言えることは、解答の字が小さい、薄い、乱雑な場合に計算間違いが多く生じている。また、字体に癖がある場合に数字の２と３を読み間違えたり、展開の際にマイナスの符号を括弧全体にかけていない計算間違いが見られた。見やすい数字や演算記号を書くことで計算間違いが格段に減少するだろうと感じたのは、約分や通分の場合である。とりわけ、約分の際に使用する斜め線(スラッシュ)が乱雑に引かれている場合は、計算の途中式が正しくても最終的に計算間違いが多かった。

以下に、各設問についてさらに詳しく述べておく。

設問１と２については、いずれも分数式の計算問題であるが、正答率に１割程度の差が生じている。通分の計算間違いにより、この様な差が生じていると思われるが、通分間違いの大半は括弧を上手く使用せず、マイナスの符号が分子全体にかかっていなかった。意外にも因数分解を間違えた者は殆ど居らず、因数分解が出来ていても通分の計算を間違えてしまうという傾向が見られた。

設問３と６については、小数と分数に関する基本的な考え方を問う問題である。確認の為に出した初歩的な問題であるが、予想に反して正答率が100%にはならなかった。設問４については、指数に関する計算問題である。既に大学の講義でも根号に関する復習を行った後ではあるが、誤答例にも記載があるように、ｎ乗根に関する知識が定着していないことが一番の原因と思われる。また、解答の中に$\sqrt{4}$ を解としたものもあり、どこまで計算するべきかをつねに考える習慣が必要だろう。今回、途中式の書き方に焦点を当てて問題を作成したつもりであったが、同時に基礎的事項の再確認も必要であると感じる結果になった。

設問５については、文字を含む指数の計算問題である。上記で述べた、約分の際の記述間違いが最も顕著に表れている問題でもある。大半の解答において約分の記述段階までは間違っていないのであるが、最終的に残った項を拾う段階で間違えているものが非常に多い。また、解き方が皆バラバラで、教科書の例題にある様な統一した書き方は殆ど見られなかった。ケアレスミスというべき書き間違い(例えば　$8^2=8$　等)については、数字や文字を少し大きく書くことで見やすくなり、間違えにくくなるのではないだろうか。数字や文字の並べ方、約分の書き方を工夫することで正答率はかなり上がるのではないかと思われる。

設問７については、文字式に関する連立方程式である。正答率は全体の中でも低めだった。まず T を消去することに着目すれば計算間違いは少ないと思われたが、想定よりも正答率が上がらなかった。求める変数以外を全て数値にすれば正答率は多少良くなるかと思われるが、学生の傾向として、文字に置き換わった途端に式の変形方法が良く見えてこないようである。また、方程式内に形の似た文字（ M と m, a と g ）が並んでいるが、記述の際に明確な区別のし難い書き方をしている者もおり、計算間違いを起こしやすく感じられた。

以上により、今回の集計結果から次の点が重要であると考える。

１．基本的な数学事項の再確認

2．計算における正確な書き方の徹底　(数字や文字の書き方、約分の際の斜線の引き方、符号の位置)

3．計算における括弧の正しい使い方

4．計算をどこで終えるか(どの様にまとめるのが見やすく分かりやすいか)の確認

Ⅳ.まとめ

平成20年1月の中央教育審議会答申において、算数科、数学科についての改善基本方針として示された内容に次の一節がある。[3)4)5)] “小・中・高等学校を通じて、発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする。”

近年、日本の子供たちの基礎学力の低下と共に、学ぶ意欲の低下、応用力の不足が問題に掲げられることが度々ある。単純に計算が出来るのみでなく、それを応用して実際に使いこなせる力を身に付けることは重要である。数学の問題として出題された計算式を解くことは出来るが、現実的な文章問題からその意図を読み取り、数式をたてて問題を解決するのは苦手、という話も良く耳にする。しかしながら、応用力を身に付ける為には基礎的な計算能力が必要不可欠である。そのためには、計算に関する十分な演習時間が必要であるし、その際に計算過程を正しく書き記すこと、必要に応じた反復学習(単純に計算するのではなく、なぜそのように計算するのかを考えさせること)が大切であると考える。

今回のアンケートでは、文字式と指数・分数に関する問題に絞って調査を行ったが、機会があれば他の内容に関しても考察を行いたい。例えば、文字を含む式と数値を含む式における計算方法の違い、単純な計算問題と文章問題における計算方法の違いなどが考えられる。

子どもにとって、「解けない」、「答えが違う」ことは簡単に「楽しくない」へと繋がってしまう。正しい計算方法を身につけ順序立てて的確に計算を行うことで、解けることへの喜びを感じ、いくつになっても算数・数学を面白いと考えてもらえればと願う。

注・文献

1)　大島利雄他(2011)：「数学Ⅰ」，数研出版
2)　川中宣明他(2011)：「数学Ⅱ」，数研出版
3)　文部科学省(2008)：「小学校学習指導要領解説　算数編」，文部科学省
4)　文部科学省(2008)：「中学校学習指導要領解説　数学編」，文部科学省
5)　文部科学省(2009)：「高等学校学習指導要領解説　数学編」，文部科学省