

算数・数学科の学習指導における「て・め・あたま」についての研究

鈴木明裕 小林永児
 岐阜聖徳学園大学教育学部 岐阜聖徳学園大学附属小学校

A study on class of "Te · Me · Atama" in mathematics

Akihiro SUZUKI, Eiji KOBAYASHI

Abstract

"Te · Me · Atama" are the words for the hands, eyes, and head in Japanese. The paper explains

Te ⇒hands ⇒Manipulative Understanding and Representation (dynamic)
Me ⇒eyes ⇒Illustrative Understanding and Representation (static)
Atama ⇒head ⇒Symbolic (including the numerical formula expression)
 Understanding and Representation

This paper establishes these principles as a means of mathematics learning instruction and suggests that they be widely utilized.

Key words : mathematics, manipulative, illustrative, symbolic, understanding, representation

I. はじめに

算数・数学科の授業のなかでは、教師と子どもの中で「ず・し・こ」「は・か・せ・どん」等の合言葉が用いられることがある。しかし、それはしばしば形骸化を生み、算数・数学科の学習指導に有用であるかと疑問をもつことがある。

「て・め・あたま」は、平成23年に実施した本学「算数・数学科合宿授業研究会」において、本学名誉教授 柴田録治先生より教えていただいた言葉である。

この言葉も合言葉と言われるものかもしれないが、流布されている合言葉と違い、算数・数学科の学習指導として有効な方法であり、整理をし、有効に働く算数・数学科の学習指導の手だてとして確立し、広く活用されていくべきものであると考えた。ここに本稿の意図がある。

本稿では、まず筆者の考える「て・め・あたま」の意味を示す。次に「て・め・あたま」にかかわる先行研究等を「て・め・あたま」の背景として示し、算数・数学科の学習指導において「て・め・あたま」を考えるよさを示す。最後に「て・め・あたま」が相互に関係し合っている姿が見られる授業を実践例として示す。

II. 「て・め・あたま」の意味

「て・め・あたま」は、手、目、頭の音である。そして、そこから連想される理解の方法ならびに表現の方法を示す言葉である。

本稿での「て・め・あたま」は、

「て」	⇒ 手	⇒ 操作による理解の方法、表現の方法	(動的)
「め」	⇒ 目	⇒ 映像による理解の方法、表現の方法	(静的)
「あたま」	⇒ 頭	⇒ 言語(数式表現を含む)による理解の方法、表現の方法	

を意味するものである。

5年生の平均の問題で例を示す。

月曜日から金曜日までの5日間に、5年2組で図書館を利用した人数は、次のようでした。 平均すると1日あたり何人が利用したといえるでしょう。(大日本図書 2012a)	曜	日	月	火	水	木	金
	人数(人)	6	0	3	5	7	7

「て」の例としては、実際に子どもが並んだり、半具体物を用いたりの操作である(図1)。

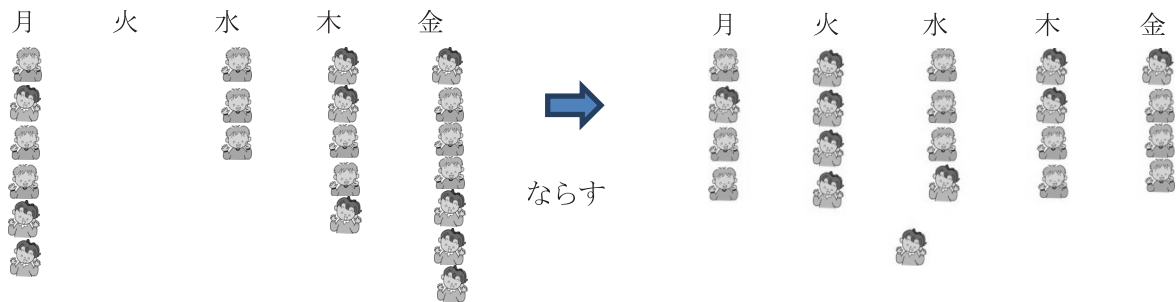


図1 「て」の例

「め」の例としては、図に表したものである(図2)。「あたま」の例は数式表現である(図3)。

月	火	水	木	金

図2 「め」の例

- $(6+0+3+5+7) \div 5 = 4.2$
- $6-1=5$ $7-2=5$ $1+2=3$
 $3+2=5$ $0+1=1$ かなり足りない
 $6-2=4$ $5-1=4$ $7-3=4$
 $3+1=4$ $0+3+1=4$ 1あまる
 $1 \div 5 = 0.2$
 $4 + 0.2 = 4.2$

図3 「あたま」の例

この「て・め・あたま」には相互の関係がある。「あたま」として2つの数式表現を示したが、その数式表現が表す「て」や「め」は何かは大切な指導内容となってくる。これについては後述する。

III. 「て・め・あたま」の背景

「て・め・あたま」を有効に働く算数・数学科の学習指導の手だてとして確立し、広く活用されていくものにしたいと考えるのは、理解ならびに表現を、操作、映像、言語等といった視点から捉えることが新しいことではなく、多くの研究が積み上げられてきているからである。

J. S. ブルーナー (1966) は、

- ある結果を達成するのに適切な一連の活動によるもの(活動的表象 enactive representation)
- ある概念を完全に定義づけることなしに、概念を表わす一連の概括的な心像や図式によるもの(映像的表象 iconic representation)
- 命題を形づくったり変形したりする決まりや法則によって支配されるところからの象徴体系からひきだされる、一連の象徴的ないし論理的な命題によるもの(象徴的表象 symbolic representation)

をあげ、EIS理論を展開した。

EIS理論は一般的な発達の原理を述べたもので、そのまま算数・数学の授業にあてはめるのは適切でないとして中原(1995)は、算数・数学教育の立場から、

- ・ 現実的表現 (Realistic Representation)
実世界の状況、実物による表現、具体物や実物による実験などはここに含める。
- ・ 操作的表現 (Manipulative Representation)
具体的な操作活動による表現、人為的加工、モデル化が行われている具体物、教具等による操作を施すことによる表現。
- ・ 図的表現 (Illustrative Representation)
絵、図、グラフ等による表現。
- ・ 言語的表現 (Linguistic Representation)
日本では日本語、米国・英国等では英語など、各国の日常言語を用いた表現、またはその省略的表現。
- ・ 記号的表現 (Symbolic Representation)
数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現。

の5つに分類するとともに、EIS にならい E1：現実的表現、E2：操作的表現、I：図形的表現、S1：言語的表現、S2：記号的表現 と記号化している。また第4章では分類された5つの中の、操作的表現、図的表現、記号的表現の3つを取り上げている。このことは、算数・数学科の学習指導において、「て・め・あたま」に相当するものがいかに重要であることを示している。

また数学の発展過程を眺めてみれば、「て・め・あたま」に相当するものの相互の関係が大きく働いている例をあげることは容易である。伊藤(2014)は、「数や記号で表現したもの(＝記号的表象)と絵や図で表現したもの(＝画像的表象)を関連付けることが考えられ、これにより双方の長所を取り込もうということである。(中略)これによって数学は著しく進歩を遂げた。」と示している。

一方、理解としての「て・め・あたま」に関わるものとして、笠井(2012)は、「算数 教科調査官が求める授業」の中で「2 「自分で考える力」を育てる授業の工夫・改善」の内容として「クラスの子ども達全員が、それぞれ納得のいく方法で「わかる」ように」という項を立て、具体例を用いて「<まず具体物を使って><次に図を使って><そして式を使って>」と3つの項目を展開して説明している。ここで、着目すべきは現在の「言語活動を生かし『思考力・判断力・表現力』を育む授業」をテーマとした中に、「て・め・あたま」に相当することが取り上げられていることである。

このように、それぞれの意図するところから個々の用語の違いや表現の違いはあるが、「て・め・あたま」は算数・数学科の指導において、古くて新しい重要なテーマであることが確認できる。

IV. 算数・数学科の学習指導において「て・め・あたま」を考えるよさ

ここでは、算数・数学科の学習指導において「て・め・あたま」を考えるよさとして、次のことを提案する。

- ・ 「て・め・あたま」を考えることは、個々の子どもの理解の深化に役に立つ。
- ・ 「て・め・あたま」を考えることは、クラス全体での練り上げ、理解の深化には欠かせない。
- ・ 「て・め・あたま」を考えれば、自然と多様な考え方をしたことになる。
- ・ 「て・め・あたま」は、教材研究のよい視点である。
- ・ 「て・め・あたま」は、算数・数学的活動を考えるよい視点となる。

まず、今なぜ「て・め・あたま」を考える必要があるのかを考えたい。

新しい学習指導要領の完全実施に伴い、現在学校現場では『思考力・判断力・表現力』の学習指導が重視され、「表現力を育む」等のテーマで研究や研修が多くなされている。それ自体は大切なことであり、好ましいことであるが、そこで扱われる表現が「あたま」に偏りすぎてはいないかと感じることが多い。そして、「て」「め」を扱っていたら、もっとスムーズに、もっと深まりのある学習ができたのではないかと思う場面に出合うことがしばしばである。

参観した4年生の「小数÷整数」の授業で考える。提示された問題は、

7.2Lの牛にゆうを、3つのよう器に等分します。1つは何Lでしょう。(大日本図書 2012b)

である。問題理解の場面では、考える見通しとして、図、数直線、式、筆算、0.1の幾つ分というものが出され、その後子ども達は自分の方法で解決へと迫った。全体解決では、式、筆算、0.1の幾つ分という考えが発表された(図4)。教師は、図による発表も予想し準備をしていたが、発表されなかった。そして、3つの発表をもとに練り上げが行われた。

解決方法1	解決方法2	解決方法3
$\begin{array}{r} 24 \\ 3 \overline{) 7.2} \\ \underline{6} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$ <p>7.2は0.1の72こ分だから 72÷3を筆算でやって 24になって 小数点をつければ答えが 2.4Lになる</p>	<p>7.2は0.1の72こ分 72÷3=24 0.1が24こで2.4 答え 2.4L</p>	<p>7.2÷3=2.4 7.2は0.1のいくつ分を 72÷3=24 0.1の24こ分 答え 2.4L</p>

図4 3つの解決方法

ここまで小学校4年生が表現できることはとても素晴らしいことで、よく鍛えてあると考える。しかし、この3つはすべて「あたま」である。そのため、その後の授業展開での議論の活発化や理解の深化を妨げたと感じた。

教科書も「あたま」ばかりだけど、ここで「て」や「め」があつたらどうであつたらう。

実際に7.2Lの牛乳を3つの容器に等分する作業をすることを考えてみよう。まず1Lを単位とするメモリを使って2Lずつ等分するだろう(図5)。この2が筆算の7の上にある2である。そして、次に残った1.2Lの3等分を考えると、1Lより細かい単位、メモリが必要となる。これが0.1Lをもとにして考えることで、それによる4が筆算では2の次に出てくる。

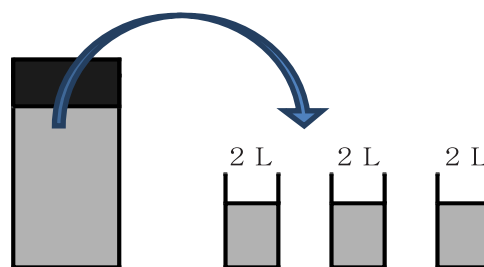


図5 「て」で考えると

「あたま」で出てくる0.1の72こ分は、確かに既習を活用したよい解決であるが、なぜ0.1なのか、割り切れなかったらどうするかがみえない。練り上げで筆算の仕方を考えるならば、「て」の操作の方が筆算に出てくる数そのものを使っている。0.1のメモリでもダメならば、次の0.01を使えばよいこともすぐに理解できるのではないだろうか。

つまり、「て」や「め」を考えることで、「あたま」の理解を補完することができるといえる。

ここで留意したいことは、学習指導としては「て・め・あたま」に軽重がないようにしたいということである。

J. S. ブルーナーのEIS理論や笠井の<まず具体物を使って><次に図を使って><そして式を使って>(〴〵は筆者)のように順序性を考えることが意味をもつこともあるだろう。だが、教室にいる子ども達を想起したとき、学習指導として「て・め・あたま」に軽重があるとはしたくない。

「て」や「め」で考え、表現している子は、ときとして自分の方法を発表できないことがある。それは、「あたま」の表現が「て」や「め」の表現より上位にあつて、「自分は下位のものしかできていない。それを発表することなんてできない」と考えてしまう傾向があるからである。そのようなとき、教師は「て」や「め」の表現が、暗黙の裡に軽視した指導をしてきたと反省すべきではないだろうか。すべての子どもがいきなり「あたま」で考えられるわけではない。「て」や「め」からでも考える子ども、自分のもっている武器で何とかしようとして問題に取り組む子を育てたいものである。

逆に、「て」だから見いだせるものもある。「II. 「て・め・あたま」の意味」で用いた平均の例について、教科書では問題の後に「人数や個数なども、平均では小数を使って表すことがあります。」と1行さらりと書かれている。「あたま」だけならば「そうなんだ」で終わるだろうけど、「て」で活動し

た子どもにとっては「あの1人を小数にするってどういうこと」「なぜ人数を小数で表すの」という素朴であるが、平均を考える上で重要な疑問や問題意識が生じるだろう。だから、「て」や「め」は「あたま」の補助としての役割だけではない。関数領域でいえば、「め」にあたるグラフと「あたま」である数式表現、そして「て」というべき表とが相互に関連していることは明らかである。

このように「て・め・あたま」を考えることは、個々の子どもの理解の深化に役に立つこと、クラス全体での練り上げ、理解の深化には欠かせないことは明らかである。

さらに、「あたま」で表現できている子には、別の方法として「て」や「め」による表現を指示して取り組ませ、「あたま」との関係を発表させるという手だても考えられる。このことは、クラス全体で一つの問題解決に迫る問題解決型授業においては有意義なことである。「授業を壊すのは進んでいる子である」という言葉があるが、そのような子どもに価値ある活動を提供することができる。そしてその子どもの活動を、クラス全体にもどして、クラス全員の共有のものとさせることで、「て・め・あたま」の誤った軽重も阻止することができると思う。

またこのように考えていくと、1つの問題に対して「て・め・あたま」を考えるだけで、多様な考え方、多様な方法での解決への迫りとなることがわかる。

すべての重要な結果は、すくなくとも2通りの異なる方法で得るべきである。とりわけ重要な結果はいつも本質的に異なる方法によって得るべきである。このような指導によって生徒達はすべての権威から解放されるであろう。

というE.H.ムーアの言葉は、算数・数学教育においてよく知られている。「て・め・あたま」を考えることは、この精神に繋がると考える。

そして、「て・め・あたま」は教材研究のよい視点である。

教師自身が教材に対して「て・め・あたま」を考え、その関連付けを考えれば、授業の見通しはより深いものになる。「今日は、子ども達にどんな活動をさせようか」「具体物としてどのようなものを準備するといいたろう」「いろいろな図がかけるけど、広がりすぎないようにしたいなあ」「今日のキーワードは何にしようか」「式に出てくる数値は、操作や図のどこに現れているかな」等々と次から次へと広がり、深まっていく。

そうした教材研究の上に立った授業であるのだから、当然子ども達によりよい算数・数学的活動を準備することができる。だから、「て・め・あたま」は算数・数学的活動を考えるよい視点となるといえる。

V. 「て・め・あたま」を意図した授業の実践例

「て・め・あたま」が相互に関係し合っている姿が見られる授業を実践例として示す。

授業者：小林永児（本学附属小学校教諭） 児童：本学附属小学校5年2組

日時：2014年6月23日（月）第5校時

単元：立体のかさの表し方を考えよう（大日本図書「楽しい教科書」5年上p48～の内容）

本時：（1/12時間）

ねらい：箱のかさをブロックのいくつ分で表す活動を通して、縦と横、高さにあたるブロックの個数が分かれば箱のかさと同じブロックの数を分かることに気付くことができる。

授業展開

T：今日こんなものを準備してきたんです。（直方体模型を提示）

C：直方体

T：算数の言葉で言ってくれるのは嬉しいね。

C：直方体

問題提示において、「て」として使うことができる教具の1つを提示。

「あたま」を意識して、算数・

T : どうして直方体だと分かる？
 C : ロ々に C : なんとなく
 T : 本当に直角かは調べなくてはいけないところかもしれないけど、直方体です。
 ノートに直方体と書いてください。(「直方体の」と板書)
 T : 「かさ」って分かりますか？
 C : 体積 C : 量 C : 水の量
 (板書に書き加え「直方体のかさ」とする)
 T : (立方体の積み木を提示)
 C : ビー玉？ C : 小っちゃい
 T : 立方体。これのいくつ分ぐらいあると思う？
 C : 100 個ぐらい C : もっとあるんじゃない
 T : じゃあ、グループになって、これだけ(直方体)取りに来てください。
 (机を並び替えて、4人、5人グループになる)
 C : 立方体はないの
 T : 立方体がほしいと言われただけど、1個だけでなくこれだけ用意しました。
 このブロックいくつ分かということをはっきりしてほしいです。分かったら、ノートに、ノートにその道筋をちゃんと残るように、何をしたかを。前にも言ったけどね、自分で言ったこととか思ったこととか、友達が言ったこととか、ノートに書いておかないと、どんどんどんどんなくなってしまうからね。
 じゃあ、はじめましょう。
 (「ブロックはいくつ分か？」と板書)

(グループでの解決開始)

A グループの活動 (T、C は机間指導の中での会話)

- ・直方体の上面の周りに立方体を並べる (図 6)
- ・直方体の側面にそって立方体を積む
- ・立方体の1辺の長さを測る・・・1 cm
- ・ノートに記録 縦5 cmで、横は8 cmで、高さは？

T : これだけでわかるの？
 C : やって見ないとわからない
 T : 何をやってみるの
 C : 縦×横×高さ
 ・直方体の表面を立方体で敷き詰めを始める→底面をうめることができない
 ・どこを縦、横として計算してよいか議論
 ・模型を離れてノートでの追究を始める

T : (立方体の並べ方) さっきと変わったね
 C : これはいらないから
 T : ふーうん
 ・直方体と同じ立体を立方体で新たに作り始める
 ・直方体の側面に並べた図形と比べながら、縦、横、高さにおいて1列いるかどうか議論をしながら作成を進める

T : 作業はストップして、ノートをまとめる時間にします。あと1分でまとめてね。
 T : ストップ。

数学用語を使用して説明することを評価し、価値付ける。

「て」「め」を重視すると板書やノート指導が疎かになる授業があるが、キーワードをきちんと板書する。

「て」として使うことができる教具の2つ目を提示。

予想をさせることで、それを確かめるために「て」「め」の必要感を高める。また、教具を一度に配布せず、子どもから「立方体はないの」と発言をさせ、必要な道具を意識させるようにさせた。

ここでのこの言葉、指示は「て・め・あたま」をつなぐ重要な言葉である。残念ながら、「て」「め」の活動がノートに残らず、結果としての「あたま」だけがノートに残ることが多い。これについて、どのような手だてが有効か、さらなる実践研究が必要であり、今後の課題である。

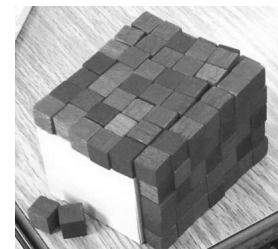


図 6

左の記録は6グループあった中の1つのグループの活動の記録である。子どもの活動を視覚化・言語化することの難しさはここにもあるが、子どもの活動、議論が模型を使った「て」とノートに記入して計算する「あたま」と行ったり来たりしていることがわかる。また、議論になると「て」を有効に使おうとしている姿があった。

活動からそのまま発表へとするのはなく、「て」「め」から「め」「あたま」へとつなげるた

T：私はこうやりましたよ、私達のグループはこうしたよということを、どんどんつなげてお話をして行ってください。

じゃあ、お話してくれる人いますか。

C1：（直方体模型を使って）ここは（横）が5cmで、ここが（縦）が7cmで、ここが（高さ）が4cmでした。それで、この面積が 7×5 で 35cm^2 で、これ（高さ）が4cmで、（立方体の1辺）が1cmだったから、 $7 \times 5 \times 4$ で140でした。

T：伝わった？

C：何人か挙手

T：C2さん、もう1回おんなじこと言って。

C2：（どうしていいか困っていて）

T：（子どもが作業して作っていた模型の写真を電子黒板に写して（図7）これでよければ使っていいよ。

C2：（前に出て、写真の図を示しながら）C1さんのグループは、ここ（縦）が7cmで、ここ（横）が5cmで、ここ（高さ）が4cmで、この面積が 7×5 で 35cm^2 で、ここが（高さ）が4段あるので、4cmでした。だから 35×4 にして140でした。

T：付け足しのある人。C3さん。

（C3が前に出て、黒板を使って説明をしようとしたので、TがC3のノートを写真に撮り電子黒板に写す。（図8））

C3：私は、この四角が1つの積み木で、直方体のやつに四角をあわせたら、横が7cmになって、高さが4cmになって、縦が5個になったから、ここだけを求めるには、 7×4 になって28になって、その28が5個あるから、 28×5 で140になった。

C：微妙な反応

T：誰か

C4：この部分の

T：どこの部分か分かった？

C4：この部分をひとかたまりとして表すと、まず 7×4 の28個のかたまりがここにあって、そのかたまりが5個あるから 28×5 をして140だと思います。

T：伝わった？

今、C4さん達が言ってくれたことをノートにまとめてごらんよ。今何をいおうとしていたのかね。

C：各自ノートに書きこむ。

（机間指導の中で、C5を指名し板書させる。（図9））

C5：（板書）

T：黒板をみてください。

今C5さんが書いてくれたことは、今までC4さん達が言ってくれたことの説明として、あれでいい？ OK？

ちょっとお話を聞いてみようか。それで話してごらん。

C5：このかたまり（黒板の長方形）は、このかたまり（電子黒板の図の側面）のことで、このかたまりは5個あれば全部の直方体のかさになるから、それだったらこの面積を求めて、それが5倍になるから、それ $\times 5$ すればいい。

T：説明が同じと言っていい？ちょっと手を挙げてみよう。

同じと言っていいよ。（C：多くの子ども挙手）

T：だめだよ。（C：挙手なし）

T：分かんないよ。（C：数名挙手）

め、ノートに記入する時間を確保。

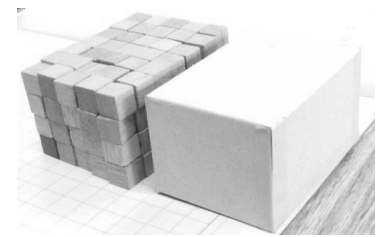


図7

「て・め・あたま」についてもICTをうまく活用するとクラス全体で考えるためのよいツールになる。模型では、小さくどの部分について議論しているのか分からないが、「て」で作られた模型をカメラで写し電子黒板で示すと、教室の後ろからでも見ることができ、クラス全員が「て」と「め」と「あたま」を行ったり来たりできる。

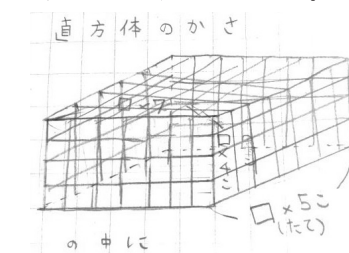


図8

これは「め」を映し出したもので、先の写真とは意味が違う。「て」での説明よりも、必要な条件を取り出した「め」での説明の方がしやすいと判断している。

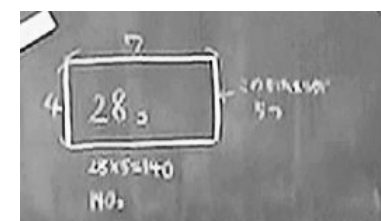


図9

「め」が見取図から投影図的なものへと変わっていつている。「め」とまとめているが、子ども達が考える「め」は1つではない。

T : オー、「分かんないよ」いるね。なるほどね。
さっき言っていたことで、どうしても気になることがあるんだけど、ブロックの個数を聞いているのに、何cm、何cmと長さをいっていたじゃない。
長さとお数ってどんな関係があるの？
関係があるの？そもそもあるの？ないの？ グループの中でお話ししてごらん。

C : グループで話し合い

Aグループではブロックを使って確認をし始める。ブロックを並べ、定規で長さを測る。

T : ストップ。一生懸命お話ししていて、途中で困っているようなので、途中までお話ししてください。

(中略)

T : なるほど、じゃあさあ、「ノートに長さとお数は関係あるの」というところまで赤で書いておいて。次は、そこからスタートします。

ところでさあ、今日の最初のブロックのいくつ分は解決できたの？

C : できた

T : それは確かなの。

C : たぶん。

T : だって、みんな 140 個と言っていたけど、そうじゃないよというグループないの。ない、ある。分かんないね。

本当に 140 個かどうか、C6さん(組み立てたブロックを指さして)確かめといて、それ数えておいて。

「あたま」だけの授業なら、この程度の議論で「はい、わかりました」で済んでしまうかもしれない。大人でも、議論が具体から離れ抽象的になると妥協してしまうことがある。しかし、「て」や「め」があることで、子ども達は納得いくまで追究したいという姿勢を示した。

グループでの話し合いに戻ったとき、自分達の武器になるものを確認し、「て」で説明しよう、納得しようと活動した。

本時のスタートの問題に戻り、課題が解決できたか確認をしたところ、「あたま」でわかっているはずなのにすっきりせず、「て」での確認をしたいと考えている子どもの姿が多かった。ここにおいて子ども達にとって「て・め・あたま」の重要性を再確認した。

VI. おわりに

「て・め・あたま」を、整理し、有効に働く算数・数学科の学習指導の手だてとして確立し、広く活用されるものにしたいという考えに立ち、また本紀要が「教育実践科学研究」という立場から示した。

この内容は既にいろいろな機会に話をしてきているが、その折に質問されることとして「「て・め・あたま」は子どもと共有する合言葉ですか」というものがある。筆者が主張するのは、教師側の指導の手だてとしての「て・め・あたま」であり、子ども達にまでこの言葉を広めたいとは考えていない。しかし、子ども達には、問題解決をしていく上での武器として、操作すること、図をかくこと、言語(数式を含めて)でまとめることを獲得して欲しいと強く願っている。

注・文献

- 1) J. S. ブルーナー 田浦武雄・水越敏行訳(1966) : 「教授理論の建築」, p68.
- 2) 伊藤説朗 (2014) : 「数学的に考える力」とは 新しい算数研究, No. 523, p39.
- 3) 笠井健一 (2012) : 「教科調査官が語るこれからの授業 小学校」 第3章 算数 教科調査官が求める授業, p70.
- 4) 中原忠男 (1995) : 「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」, p199, p211.
- 5) 大日本図書 a (2012) : 「たのしい算数」5年下, p53.
- 6) 大日本図書 b (2012) : 「たのしい算数」4年下, p39.