論　文

数学基礎教育における計算力向上の糸口を探る

藤　垣　佳　子
岐阜聖徳学園大学教育学部

Research on how to improve calculation ability in basic mathematics education

Yoshiko FUJIGAKI

Abstract

To learn mathematics, it is necessary to have basic mathematical knowledge and basic calculation ability. To improve calculation ability, it is necessary to carry out repetitive learning and calculation exercises in the correct order. Furthermore, it is important to make an analysis of students' current calculation abilities and their calculation methods, and to define the necessary educational policies. In this study, the trend of calculation methods for university students who had calculation problems in high school mathematics was investigated. In addition, although mathematics is known as the study of accumulation, it was also examined whether there was a relationship between the questions of different ranges in high school mathematics.

Key words : calculation ability, calculation process, mathematics basic education, repetitive learning

Ⅰ．はじめに

数学を学ぶ際には、なぜそうなるのかを考え理解することが必要となるが、問題演習や実践では理解した内容を計算する力も必要になるだろう。稀に、ノートを取らずに分かった、理解したから解けるという学生が、実際に計算を行うと計算間違いをするという姿を目にすることがある。教科の特性として基礎から応用へと内容が順に発展していく中で、とりわけ義務教育課程や高校で学ぶ算数・数学の学習においては、学年が進むにつれてそれまでに身についているべき数学の基礎知識や計算力が積み重なり増えてくる。ある程度の数学の基礎知識、基礎となる計算力を持たなければ、新しい数学知識を確実に習得することは難しくなるだろう。数学理論の理解と計算力、どちらも数学の学習には必要不可欠であるが、計算力については段階的な反復学習で基礎となる計算方法を身につけ、より有効な演習、計算演習を行うことでさらなる向上が見込めるのではないだろうか。その為には、現在の学習者達の計算の傾向について詳しく知る必要性があり、どのような計算方法を用いる者が多いのか、どういった計算間違いをする者が多いのかを把握しなければならない。筆者は文献[1)2)]の中で、大学生へのアンケートを基に指数計算や分数式に関する計算過程と結果の正誤性について及び算数・数学の好き嫌いと文章問題の正答率との関連について調査を行った。調査結果から、数学の基礎知識を身につけるだけではなく、正しく数式を記述すること、正しい手順で計算を行うことも結果の正誤に深く関わることを確認した。文献[1)]における連立方程式の解答結果に疑問を持ち、文献[2)]でさらに詳しく連立方程式に関する問題の調査を行ったが、文献[1)]における分数式の計算に関しても解答結果に疑問を抱いたものの、さらなる

調査は行えなかった。

　また、近年の大学生の傾向として、計算問題の解答が簡潔に記されないものが見られるようになってきている。計算としては間違っていないとしても、より複雑な計算の場合には計算間違いをするのではないか、先を見通して計算を進めておらず、応用的な計算は出来ないのではないかと懸念することがある。具体的には、約分や因数分解が十分に出来ていない、有理化が出来ていない、指数計算を指数法則で纏めず端から順に計算して途中式での数値が大きくなる、因数分解した結果を全て展開してしまう、などが挙げられる。特に、多項式や有理式の計算結果については、例えば $\frac{(x+3)^2}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+6x+9}{x^3+2x^2+x}$ と展開して逆に見難くなり、先の計算を扱い辛くしてしまう解答を目にすることがある。おそらく計算せよ（簡潔に表せ）の意味が曖昧になっているか、最後まで計算する数値と文字式の違いに上手く対応出来ていないか、のどちらかではないかと思われるが、簡潔ではない計算方法や必要以上に計算を行うことは計算間違いをする危険性を増やしてしまうだろう。

　そこで、本研究では現在の指導要領をもとに[3)4)]、高校数学の数Ⅱの範囲から式の因数分解と展開に関する問題を、数Ⅰの範囲から有理式に関する問題を出題することにして、現在の大学生の計算方法の傾向について調べることにした。また、出題範囲の関係から高校における数学科目の履修状況についても合わせて問うことにした。

Ⅱ．調査方法とその内容

　計算問題に関するアンケートを行う際に、現在も継続して数学を勉強し計算演習を行っている集団として、教育学部に在籍しており小学校・中学校の数学教師を目指す学生たちを対象とした。岐阜聖徳学園大学教育学部の学生143名に協力を頼み、2015年７月に調査を行った。調査の際に、設問２の計算問題については出来る限り計算過程を省略せずに書いて欲しい旨を伝えて、下記の様な計算問題を解いてもらった。

計算問題に関するアンケート　　　　　　　　　　　学籍番号（下３桁を除く）K________

以下の設問に答えて下さい。
（計算問題については計算過程を省略せず書いて下さい）

１．高校で履修した科目名を全て〇で囲んで下さい。
　数学Ⅰ　数学Ⅱ　数学Ⅲ　数学Ａ　数学Ｂ
　その他（　　　　　　　　　　　　　）

２.（１）次の式を計算せよ。

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x-2}$$

（２）次の式を計算せよ。

$$\frac{x-1}{x^2-x-2}\div\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+6}$$

（３）次の式を計算せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

（４）次の式を展開せよ。

$$(a+b+c+d)^2$$

Ⅲ. 集計結果とその分析

計算問題に関するアンケートを集計し、その結果と解答例及び誤答例についてまとめたものは以下の通りである（白紙の解答については未解答とし、計算途中で終了している解答は誤答として扱った）。解答結果について、一旦正答・誤答で分類（表２）を行ったが、特に気になった設問２(1) 及び２(2) の解答については正答をさらに分類（表３）し、次の結果を得た。

表１：設問１に関するアンケート集計結果（回答者数143名）

	数Ⅰ	数Ⅱ	数Ⅲ	数A	数B	その他（数C）
履修した	143	141	119	143	140	53
全体に占める割合	100%	98.6%	83.2%	100%	97.9%	37.1%

表２：設問２に関するアンケート集計結果（回答者数143名）

問題番号	正答	誤答	未解答	正答率(%)
(1)	127	16	0	88.8
(2)	116	27	0	81.1
(3)	102	36	5	71.3
(4)	119	22	2	83.2

表３：設問２における正答の分類

(1)の正答のうち解答が	人数
$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$	80
$\frac{x+3}{x^2+x-2}$	47
合計	127

)の正答のうち解答が	人数
$\frac{x-3}{(x+1)(x+3)}$	85
$\frac{x-3}{x^2+4x+3}$	31
合計	116

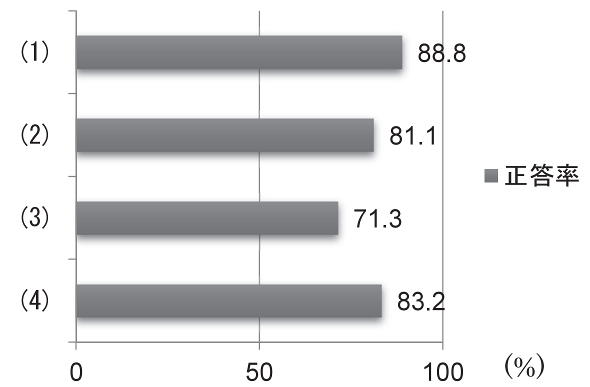

図1：各設問における正答率

解答例及び誤答例

(1) 解答例：

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x-2}$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x+2)+1}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\frac{x+3}{(x-1)(x+2)} \quad \cdots(答)$$

誤答例：
・計算間違い（因数分解せず直接掛け合わせる）（10件）
・通分の際に分子の計算を間違える　（４件）
・その他　（２件）

(2) 解答例：

$$\frac{x-1}{x^2-x-2}\div\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+6}$$
$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}\div\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}\times\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+3)} \quad \cdots(答)$$

誤答例：
・因数分解の間違い　(16 件)
・約分の間違い　（５件）
・÷と×の間違い　（２件）
・記述間違いによるもの　（３件）
・その他　（１件）

(3) 解答例：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$+\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$$
$$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)$$
$$=\sqrt{5}-\sqrt{2} \quad \cdots(答)$$

誤答例：
・計算間違い(直接分母を通分する)　(21 件)
・計算間違い(分母の−1 によるもの)　（８件）
・その他　（７件）

(4) 解答例：

$$(a+b+c+d)^2$$
$$=\{(a+b)+(c+d)\}^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)$$
$$+(c+d)^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd$$
$$+c^2+2cd+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad$$
$$+2bc+2bd+2cd \quad \cdots(答)$$

誤答例：
・結果のみで間違っているもの　(10 件)
・展開が終わっていないもの　（４件）
　例えば $a+b=A$ とおいたまま
・その他　（８件）

設問１については、回答者の履修状況を確認するために設定した。数Ⅰ・数Ⅱ・数Ａ・数Ｂの履修状況はほぼ100%、数Ⅲの履修状況は８割強、高校数学の旧カリキュラム履修者と新カリキュラム履修者が混在するため、数Ｃの履修状況が４割弱という回答者層であった。

設問２の計算問題の正答率については全体で７割から９割弱の正答率となり、予想よりも計算間違いの目立つ結果となったが、因数分解等やや計算間違いを起こしやすい内容が含まれていたようであり、同分野からの別の問題であればまた違った結果となるかもしれない。(設問 2(2) に似た問題を文献[1]で出題しているが、その際の正答率は９割以上であった。)

最も正答率の低い設問２(3) に関しては、数Ⅰ[5] の根号を含む式の計算の単元において、同様な計

算を同様な問われ方で学習しているはずであったが、計算せよの問いを有理化して計算せよ、と丁寧に問えば正答率が変わったかもしれない。また、３項での計算は章末問題のレベルであり、問レベルの２項での計算であればまた違った結果が得られたと予測されることを付け加えておく。分母をそのままの順で有理化する場合に、全ての分母に（−1）が現れることでの計算間違いが増えるのではないかと予測して問題を作成したが、有理化を行わない、という想定はしていなかった。今回の調査結果としては、はじめに通分を行い分母も分子も根号が沢山残ったままとなっている解答が21件もあった。まず有理化を行うというヒントを与えれば、有理化に関する計算手法についてより詳しく調査することが出来たのかもしれない。簡潔に計算を行うための有理化の必要性を、十分に理解させる必要性を強く感じた。また、全正答102件のうち分母が（−1）ではなく１となるように工夫し、順序交換をしてから有理化が行えたものは13件に留まり、先を見通して計算間違いを減らすための計算方法を促す必要性も感じる結果となった。

設問２(4）に関しては、数Ⅰ[5] の整式の単元から因数分解と対をなす展開（積を計算して１つの整式で表す）の意味合いが理解出来ているかを確認する為に出題した。既に様々な展開公式を知っているということもあってか、途中式を省き結果のみを記している解答に間違いが多くみられた。正答に関しては、式の展開の工夫として $a+b=A,\ c+d=B$ とおき、見通し良く計算を行っている解答が多くみられた。（教科書の例題でもこの工夫は使用されている。）

設問２(1)、２(2）に関しては、数学Ⅱ[6] の分数式とその計算の単元から分数式の和と商に関する問題を出題した。どちらも因数分解を行ってから通分や約分の計算を行う共通の手法で計算する問題であるが、因数分解の計算間違いが多かったために２(2）の方の正答率が低くなっている。２(1）の正答の中には、直接掛け合わせ（通分）を行ってから約分する解答が数件見られたが、最初に因数分解を行わなかった解答の大半は誤答の結果であった。２(2）については、因数分解と割り算から掛け算への変形を同時に行い、記述を省略することによる計算間違いがいくつかみられたが、それ以上に因数分解による誤答（例えば $x^2-5x+6=(x-6)(x+1)$ とする間違い）が多く見られた。また、２(1)、２(2）に共通して言えることとして、分母を因数分解から多項式に展開してしまう結果が目立った。折角因数分解で見やすくまとまっている分母や分子を因数分解から多項式へと展開してしまう計算には、特に違和感を感じた。計算間違いを減らすための簡潔な計算方法の再確認と合わせて、どこまで計算すべきか、必要以上に計算をせず分かりやすい解答で終える有用性を理解させることも必要であると感じた。

データーの集計を行った際、設問２(3）の誤答が予想以上にあり、また有理化を行わない計算が多く見られたことから、設問２(3）を間違えた場合には基礎的な計算方法が身についておらず、設問２(1）及び２(2）も間違えやすい傾向にあるのではないかと考えた。（設問２(1）及び２(2）の結果を展開した解答との関連についても気にはなったが、データー数の関係で今回はさらに傾向を調べることは難しいと考え、今回はその考察は行っていない。）そこで、設問２(3）の正誤に対して、設問２(1）及び２(2）の正誤の割合について分類を行い、表２における正答率の集計結果をまとめ直すことにした。ここでは白紙解答も誤答とまとめて扱い、関連があるかについて検定を行い得られた結果を以下に示す。

表４：設問２(3）の正誤に対する設問２(1）及び２(2）の正誤の割合（回答者数143人中）

	2(1)の正答数	2(1)の誤答数	2(2)の正答数	2(2)誤答数
2(3)の正答数：102 件中	93	9	85	17
2(3)の誤答数：41 件中	34	7	31	10
合計：143	127	16	116	27

設問２(3）の正誤と設問２(1）の正誤、及び設問２(3）の正誤と設問２(2）の正誤に関係があるかどうかを検定する。有意水準５%で χ^2 検定（独立性の検定）を行う。以下の表において横欄の正、誤は設問２(3）の正答・誤答者数を表し、縦欄の正、誤は設問２(1）及び２(2）の正答・誤答者数を表す。0

を実測度数（Observed frequency）、Eを期待度数（Expected frequency）とする。

設問２(1) の場合

仮説：設問２(3) の正誤と設問２(1) の正誤に関係が無い

O	正	誤	計
正	93	34	127
誤	9	7	16
計	102	41	143

E	正	誤	計
正	90.6	36.4	127
誤	11.4	4.6	16
計	102	41	143

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum \frac{(\mathrm{O}-\mathrm{E})^2}{\mathrm{E}} \\ &= \frac{(93-90.6)^2}{90.6} + \frac{(34-36.4)^2}{36.4} \\ &\quad + \frac{(9-11.4)^2}{11.4} + \frac{(7-4.6)^2}{4.6} \\ &\fallingdotseq 0.505 + 0.158 + 0.064 + 1.252 \\ &= 1.979 < 3.841\end{aligned}$$

仮説を棄却することが出来ない

設問２(2)の場合

仮説：設問２(3) の正誤と設問２(2) の正誤に関係が無い

O	正	誤	計
正	85	31	116
誤	17	10	27
計	102	41	143

E	正	誤	計
正	82.7	33.3	116
誤	19.3	7.7	27
計	102	41	143

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum \frac{(\mathrm{O}-\mathrm{E})^2}{\mathrm{E}} \\ &= \frac{(85-82.7)^2}{82.7} + \frac{(31-33.3)^2}{33.3} \\ &\quad + \frac{(17-19.3)^2}{19.3} + \frac{(10-7.7)^2}{7.7} \\ &\fallingdotseq 0.064 + 0.159 + 0.274 + 0.687 \\ &= 1.184 < 3.841\end{aligned}$$

仮説を棄却することが出来ない

上記におけるχ^2の値の棄却域は、有意水準５%で自由度１より、χ^2分布表から $\chi_1^2(0.05) = 3.841$ 以上となる。結果として、設問２(3) の正誤と設問２(1) 及び２(2) の正誤に関連があるとはいえず、今回の出題内容では根号を含む式の計算に関する問題が解ける・解けないと、分数式の和と商に関する問題が解ける・解けないについて関連があるとは言えなかった。問題の難易度が各設問でそろっていたとは言えず、断定することは出来ないが、各単元毎に基本となる計算方法の確認が重要であり偏ることなく学習する必要があるということが言えるだろう。

Ⅳ. まとめ

近年再び、理数系科目に関する教育の抜本的な改革について様々な改訂案が取り沙汰されている。高校数学については新カリキュラムに改訂されてまだ数年であるが、既に次の改訂に向けて新しい構成案が検討されているらしい。現在の高校数学カリキュラムが改善された際には、改善の具体的事項として、数学Ｉでは「基礎的・基本的な知識や技能及びそれらを活用する能力などを身に付けること

をねらいとする」、数学Ⅱでは「数学的な資質・能力を伸ばすことをねらいとし、数学Ⅰに引き続く科目として内容の系統性に配慮する」と記されている[4)]。また、数学的な知識や技能の「量」だけではなく「質」を問う必要がある、との記載もある。しかしながら、現場の意見としては「量」が多すぎて「質」が問えないという意見が多いようだ。今回のアンケート集計結果を見ても、将来教育の立場に立つであろう学生たちであっても、基礎的な知識や計算力が定着していないケースのあることが分かる。学生達にどの段階で何をどのように教えれば良いのか、というのはなかなか難しい問題ではあるが、数学の面白さを伝えられる「質」を保てるゆとりと、さまざま分野で活用できる「量」を学ぶ時間を保証しながら、それらを支える計算力を反復学習で底上げ出来るようになって欲しいと感じている。

注・文献

1）藤垣佳子（2014）：計算過程の重要性-文字式と指数・分数の問題について-，教育実践科学研究センター紀要，第13号，201-206
2）藤垣佳子（2015）：方程式の解法に見る数学基礎教育の大切さ，教育実践科学研究センター紀要，第14号，181-188
3）文部科学省（2008）：「中学校学習指導要領解説　数学編」，文部科学省
4）文部科学省（2009）：「高等学校学習指導要領解説　数学編」，文部科学省
5）大島利雄他（2011）：「数学Ⅰ」，数研出版
6）大島利雄他（2011）：「数学Ⅱ」，数研出版